Equivalence masse-énergie

Le travail d'une force constante F s'appliquant à un corps sur une distance dx effectue un travail et augmente ainsi l'énergie cinétique de ce corps de la quantité élémentaire $dE_C = F\,dx$, avec

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt}v + \frac{dv}{dt}m \tag{1}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

Comme m est fonction de v, et v est fonction de t, on aura :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{2}m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dv}{dt} \tag{3}$$

Remplaçons (2) et (3) dans (1) :

$$F = \frac{m_0\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{dv}{dt} + \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$F = \frac{m_0\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$F = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{dv}{dt} \tag{4}$$

La variation d'énergie dE_C s'écrit alors :

$$dE_C = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\underbrace{\frac{dv}{dt}\cdot dx}_{=v\cdot dv}$$

$$dE_C = \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot dv \tag{5}$$

Il faut encore intégrer (5) afin de trouver l'énergie cinétique E_C :

$$E_C = \int_0^v \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}dv \tag{6}$$

On utilisera le changement de variable $y = 1 - \frac{v^2}{c^2}$:

$$y = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Leftrightarrow v = c\sqrt{1-y}$$

$$\frac{dy}{dv} = -\frac{2v}{c^2} \quad ; \quad dy = -\frac{2v}{c^2}dv \quad ; \quad dv = \frac{dy}{-\frac{2v}{c^2}}$$

Si v varie de 0 à v, alors y varie de 1 à $1 - \frac{v^2}{c^2}$.

En remplaçant dans (6), nous trouvons :

$$E_C = \int_1^{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{m_0 v}{y^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dy}{-\frac{2v}{c^2}}$$

$$E_C = \int_1^{1-\frac{v^2}{c^2}} -\frac{m_0 c^2}{2y^{\frac{3}{2}}} \cdot dy$$

$$E_C = -\frac{m_0 c^2}{2} \int_1^{1-\frac{v^2}{c^2}} y^{-\frac{3}{2}}\, dy$$

$$E_C = -\frac{m_0 c^2}{2} \cdot \left[\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$E_C = \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{y}}\right]_1^{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$E_C = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

Ou encore, en utilisant (2) :

$$E_C = mc^2 - m_0 c^2$$

Le deuxième terme de cette différence fait référence à la masse au repos m_0 et représente donc l'énergie que le corps possède au repos. L'énergie totale étant la somme de cette énergie au repos et de l'énergie cinétique, on trouve finalement :

$$E = E_C + m_0 c^2$$

$$E = mc^2$$

q.e.d.